МАТЕМАТИКА, IV_3
1. и 2. час, 29. 10. 2020. године
Проф. Биљана Јурошевић

ПОЈАМ ИЗВОДА

Дефиниција: Нека је функција f дефинисана на интервалу (a,b) и $x_0 \in (a,b)$ фиксирана тачка. Нека је Δx прираштај аргумента функције такав да $x_0 + \Delta x \in (a,b)$. Под ***изводом*** функције f у тачки x_0, у означи y' или $f'(x_0)$, подразумијева се сљедећа гранична вриједност (уколико постоји):

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ је лијеви извод функције у тачки x_0.

$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ је десни извод функције у тачки x_0.

Механичко тумачење извода: извод функције $s = s(t)$ у тачки t_0 представља тренутну брзину (у моменту t_0) тијела које се креће праволинијски по закону $s = s(t)$.
Геометријско тумачење извода: извод функције f у тачки x_0 представља коефицијент правца тангенте графика те функције у тачки M_0 на графику са апсцисом x_0.

Примјеном дефиниције извода налазе се изводи неких елементарних функција у произвољној унутрашњој тачки њихових области дефинисаности. Међутим, постоје правила која нам омогућавају да знатно једноставније налазимо изводе функција.

Теорема: Ако свака од функција u и v има извод у тачки x, тада функција Cu (C = const) и збир, разлика, производ и количник функција u и v (у случају количника треба претпоставити да је $v(x) \neq 0$) такође имају извод у тачки x и притом важе формуле:

1) $[Cu(x)]' = Cu'(x), C = \text{const};$
2) $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x);$
3) $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x);$
4) $\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$

Теорема (извод сложене функције): Ако функција u има извод у (фиксираној) тачки x, а функција $y = f(u)$ има извод у тачки $u = u(x)$, тада и функција $y = f(u(x))$ има извод у тачки x и при том важи формула $y' = f'(u)u'(x)$.

Теорема (извод инверзне функције): Нека за функцију $f(x)$ постоји инверзна функција $x = f^{-1}(y)$ у околини фиксиране тачке x_0. Ако постоји извод функције $y = f(x)$ у таквој тачки x_0 и притом је $f'(x) \neq 0$, тада постоји и извод инверзне функције $x = f^{-1}(y)$ у тачки $y_0 = f(x_0)$ и једнак је $\frac{1}{f'(x_0)}$.

__**Таблица извода неких елементарних функција**__:

Функција	Извод функције
$y = C = \text{const.}$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = x^a$	$y' = a \cdot x^{a-1}$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$
$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \mathrm{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$y = \mathrm{ctg} x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \mathrm{arc\,tg} x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$
$y = \mathrm{arc\,ctg} x$	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$

__Примјер1__: Одреди извод полинома $P(x) = 2x^5 - 3x^3 + x^2 - 1$ користећи формуле за лакше налажење извода и изводе елементарних функција.

__Рјешење:__

Користећи формулу: $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$, имамо:

$$P'(x) = (2x^5)' - (3x^3)' + (x^2)' - (1)'$$

Даље, користимо формулу $[Cu(x)]' = Cu'(x), C = \text{const}$:

$$P'(x) = 2(x^5)' - 3(x^3)' + (x^2)' - (1)'$$

Препознајемо двије функције из таблице извода неких елементарних функција.

Извод константе је 0, а $(x^a)' = a\,x^{a-1}$.

$$P'(x) = 2(5x^{5-1}) - 3(3x^{3-1}) + (2x^{2-1}) - 0 = 2(5x^4) - 3(3x^2) + (2x^1) = 10x^4 - 9x^2 + 2x.$$

Примјер2: Одреди извод функције $y = e^x \sin x$ користећи формуле за лакше налажење извода и изводе елементарних функција.
Рјешење:
Користећи формулу: $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$ имамо:

$y' = (e^x)' \sin x + e^x (\sin x)'$.

Из таблице извода неких елементарних функција уочима да је $(e^x)' = e^x$ и $(\sin x)' = \cos x$.

$y' = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x (\sin x + \cos x)$.

Примјер3: Одреди извод сложене функције $y = \ln(3x^2 - 1)$.
Рјешење:
Имамо да је $f(x) = \ln x$, а $u(x) = 3x^2 - 1$. Користимо формулу $y' = f'(u)u'(x)$.
$f(u)$ је композиција функција $f(u(x)) = f(3x^2 - 1) = \ln(3x^2 - 1)$.

Из таблице извода неких елементарних функција уочима да је $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

$y' = (\ln(3x^2 - 1))' \cdot (3x^2 - 1)' = \frac{1}{3x^2 - 1}(3 \cdot 2x^{2-1} - 0) = \frac{6x}{3x^2 - 1}$.

Задаци за самосталан рад:

1. Одреди изводе сљедећих функција:
   1) $y = x^4 - x^2$;
   2) $y = x^2 + \frac{1}{x}$;
   3) $y = \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}$;
   4) $y = x^2 \ln x$;
   5) $y = \frac{4 - x^3}{x^2 + 2}$ (количник функција).
2. Нађи изводе сљедећих функција:
   1) $y = (2x + 1)^{25}$;
   2) $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$;
   3) $y = \ln(\sin x)$;
   4) $y = e^{\operatorname{tg} x}$;
   5) $y = \arcsin(x^2 - 1)$.

Напомена:
У свеску преписати формуле за налажење извода, као и таблицу извода неких елементарних функција. С разумијевањем, а пратећи објашњења, преписати и ријешене примјере (плавом бојом су назначени дијелови рјешења који би били исписани на табли).
На основу ријешених примјера урадити задатке за самосталан рад, који имају улогу задаће, а чијом израдом бисте извјежбали ову наставну јединицу.
Све послати на увид на имејл адресу jurosevic93biljana@gmail.com или у приватну поруку на вајбер. За вријеме трајања часова у вајбер групу IV_3 пишите за све недоумице у вези овог материјала. Због праћења реализације наставе на даљину неопходно је да имам вашу повратну информацију.