МАТЕМАТИКА, IV_3
1. час, 17. 11. 2020. године и
1. и 2. час, 19. 11. 2020. године
Проф. Биљана Јурошевић

ИСПИТИВАЊЕ ТОКА И ЦРТАЊЕ ГРАФИКА ФУНКЦИЈЕ

За испитивање тока функције постоји одређена шема. Она се обично састоји у сљедећем редослиједу поступака које треба обавити:

1) Област дефинисаности функције, понашање функције на крајевима области дефинисаности, асимптоте;
2) Парност (непарност), периодичност, нуле и знак функције, пресјечна тачка графика и y – осе;
3) Први извод, монотоност, екстремне вриједности;
4) Други извод, конвексност, превојне тачке;
5) Цртање графика функције.

Примјер1: Испитати ток и нацртати график функције $y = x^2 - x^4$.
Рјешење:

1) Функција је дефинисана за свако $x \in (-\infty, +\infty)$. Како је функција дефинисана за све реалне бројеве, график ове функције нема вертикалне асимптоте.
$\lim_{x\to\infty}(x^2 - x^4) = \lim_{x\to\infty} x^4\left(\frac{1}{x^2} - 1\right) = \infty \cdot (0-1) = -\infty$, па график функције нема ни хоризонталне асимптоте.
$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^4}{x} = \lim_{x\to\infty}(x - x^3) = \lim_{x\to\infty} x^3\left(\frac{1}{x^2} - 1\right) = \pm\infty$, па нема ни косих асимптота.

2) Функција је парна, јер је $f(-x) = (-x)^2 - (-x)^4 = x^2 - x^4 = f(x)$, што значи да је симетрична у односу на y – осу.
Функција није периодична.
$y = 0 \Leftrightarrow x^2 - x^4 = 0 \Leftrightarrow x^2(1 - x^2) = 0$
$x^2 = 0 \ \vee \ 1 - x^2 = 0$
$x = 0 \ \vee \ x = -1 \vee x = 1$ (нуле функције)
Тачке (0, 0), (-1, 0) и (1, 0) припадају графику функције и тачка (0, 0) је пресјечна тачка графика и y – осе.
Знак функције:

	$-\infty$ … -1	-1 … 0	0 … 1	1 … $+\infty$
x^2	+	+	+	+
$1-x^2$	-	+	+	-
$y = x^2 - x^4$	-	+	+	-

$y > 0$ за $x \in (-1, 0)\cup(0, 1)$ (график је изнад x – осе);
$y < 0$ за $x \in (-\infty, -1)\cup(1, +\infty)$ (график је испод x – осе).

3) $y' = (x^2 - x^4)' = (x^2)' - (x^4)' = 2x - 4x^3 = 2x(1 - 2x^2)$

$y' = 0 \Leftrightarrow 2x - 4x^3 = 0 \Leftrightarrow 2x(1-2x^2) = 0$

$$2x = 0 \;\vee\; 1 - 2x^2 = 0$$

$$x = 0 \;\vee\; x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \vee x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$
$2x$	-	-	+	+	
$1-2x^2$	-	+	+	-	
y'	+	-	+	-	
y	↗	↘	↗	↘	

Функција је растућа за $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, а опадајућа за $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$.

Тачке T_{min} (0, 0), T_{max1} $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{4}\right)$ и T_{max2} $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{4}\right)$ припадају графику функције и представљају тачке локалног минимума и локалних максимума функције.

4) $y'' = (y')' = (2x - 4x^3)' = (2x)' - (4x^3)' = 2 - 12x^2 = 2(1-6x^2)$

$y'' = 0 \Leftrightarrow 1 - 6x^2 = 0$

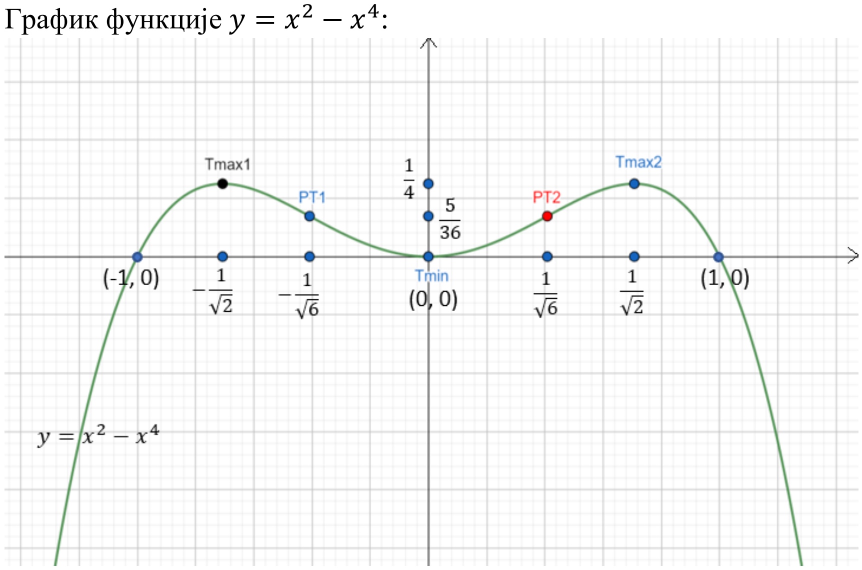
$$x^2 = \frac{1}{6}$$

$$x = -\frac{1}{\sqrt{6}} \vee x = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$+\infty$
y''	-	+	-	
y	∩	∪	∩	

Превојне тачке су $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{5}{36}\right)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{5}{36}\right)$.

5) График функције $y = x^2 - x^4$:



Примјер2: Испитати ток и нацртати график функције $y = \frac{x^2}{x-1}$.

Рјешење:

1) Домен функције: $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$.
Функција је дефинисана за свако $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.
Асимптоте:
$\lim_{x\to 1} \frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{0} = \pm\infty$; вертикална асимптота графика ове функције је права $x = 1$.
$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x-1} = \pm\infty$, па график функције нема хоризонталне асимптоте.
$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-1} = 1 = k$;
$\lim_{x\to\infty}(f(x) - 1 \cdot x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-1} = 1 = n$;
Коса асимптота функције је права $y = x + 1$.

2) Функција није ни парна ни непарна, јер је $f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)-1} = \frac{x^2}{-x-1} = -\frac{x^2}{x+1} \neq -f(x)$ и $f(-x) \neq f(x)$.
Функција није периодична.
$$y = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x-1} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0$$
$x = 0$ (нула функције)
Тачка (0, 0) припада графику функције и она је пресјечна тачка графика и y – осе.
Знак функције:

	$-\infty$ 0	0 1	1 $+\infty$
x^2	+	+	+
$x-1$	-	-	+
y	-	-	+

$y > 0$ за $x \in (1, +\infty)$ (график је изнад x – осе);
$y < 0$ за $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$ (график је испод x – осе).

3) $y' = \left(\frac{x^2}{x-1}\right)' = \frac{(x^2)'(x-1) - x^2(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{2x(x-1) - x^2 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$
Први извод функције није дефинисан за $x = 1$.
$y' = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0$
$x = 0 \vee x = 2$

	$-\infty$ 0	0 1	1 2	2 $+\infty$
x	-	+	+	+
$x-2$	-	-	-	+
$(x-1)^2$	+	+	+	+
y'	+	-	-	+
y	↗	↘	↘	↗

Функција је растућа за $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, а опадајућа за $x \in (0, 1) \cup (1, 2)$.
Тачке T_{min} (2, 4) и T_{max} (0, 0) припадају графику функције и представљају тачке локалног минимума и локалног максимума функције.

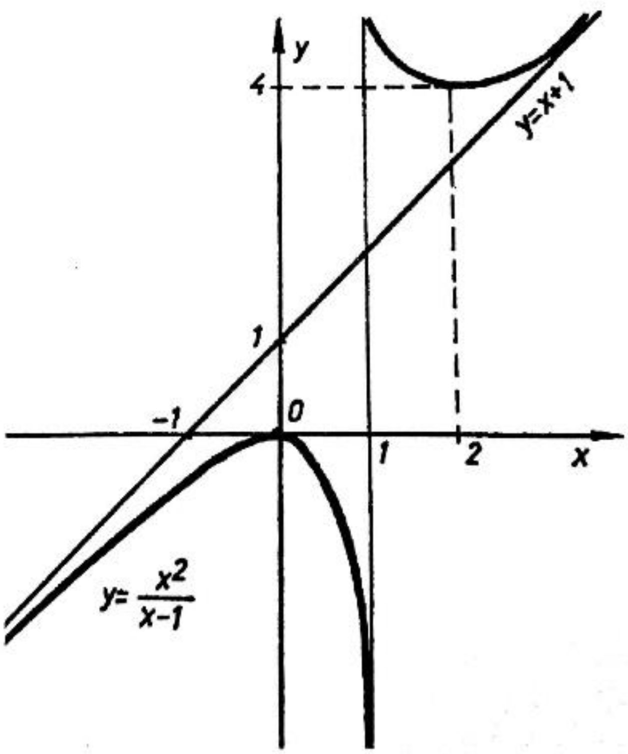
4) $y'' = (y')' = \left(\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}\right)' = \frac{(x^2-2x)'(x-1)^2-(x^2-2x)((x-1)^2)'}{(x-1)^4} = \frac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x)(2(x-1)\cdot 1)}{(x-1)^4} =$
$= \frac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x)(2(x-1))}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)[(2x-2)(x-1)-2(x^2-2x)]}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3}$

Други извод функције није дефинисан за $x = 1$.

	-∞	1	+∞
y''	-		+
y	∩		∪

Тачка са координатом $x = 1$ није превојна тачка, јер функција за такво x није дефинисана.

5) График функције $y = \frac{x^2}{x-1}$:



Примјер3: Испитати ток и нацртати график функције $y = \sqrt[3]{x^2 - 2x}$.
Рјешење:

1) Функција је дефинисана за свако $x \in (-\infty, +\infty)$. Како је функција дефинисана за све реалне бројеве, график ове функције нема вертикалне асимптоте.
$\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x^2 - 2x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x(x-2)} = +\infty$, па график функције нема хоризонталне асимптоте.
$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2-2x}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{x^2-2x}{x^3}} = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = 0 = k$, што указује да график може имати само хоризонталну асимптоту, али нема је, јер је $\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x^2 - 2x} = +\infty$.

2) Функција није ни парна ни непарна, јер је $f(-x) \neq -f(x)$ и $f(-x) \neq f(x)$.
Функција није периодична.
$y = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2 - 2x} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0$
$x = 0 \ \vee \ x = 2$ (нуле функције)
Тачке (0, 0) и (2, 0) припадају графику функције и тачка (0, 0) је пресјечна тачка графика и y – осе.
Знак функције:

	$-\infty$	0	2	$+\infty$
x	-	+	+	
$x-2$	-	-	+	
y	+	-	+	

$y < 0$ за $x \in (0, 2)$ (график је изнад x – осе);
$y > 0$ за $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ (график је испод x – осе).

3) $y' = \left(\sqrt[3]{x^2 - 2x}\right)' = \left((x^2 - 2x)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}(x^2 - 2x)^{-\frac{2}{3}} \cdot (x^2 - 2x)' = \frac{1}{3}(x^2 - 2x)^{-\frac{2}{3}}(2x - 2) =$
$= \dfrac{2}{3}\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{(x^2 - 2x)^2}} = \dfrac{2}{3}\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x^2(x-2)^2}}$
Први извод функције није дефинисан за $x = 0$ и за $x = 2$.
$y' = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$x-1$	-	-	+	+	
$\sqrt[3]{x^2(x-2)^2}$	+	+	+	+	
y'	-	-	+	+	
y	↘	↘	↗	↗	

Функција је растућа за $x \in (1, 2) \cup (2, +\infty)$, а опадајућа за $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$.
Тачка T_{min} (1, -1) припада графику функције и представља тачку локалног минимума.

4) $y'' = (y')' = \left(\frac{2}{3}(x^2-2x)^{-\frac{2}{3}}(x-1)\right)' = \left(\frac{2}{3}(x^2-2x)^{-\frac{2}{3}}\right)'(x-1) + \left(\frac{2}{3}(x^2-2x)^{-\frac{2}{3}}\right)(x-1)' =$

$$= -\frac{4}{9}(x^2-2x)^{-\frac{5}{3}}(2x-2)(x-1) + \left(\frac{2}{3}(x^2-2x)^{-\frac{2}{3}}\right)\cdot 1 = -\frac{4}{9}\frac{2x^2-4x+2}{\sqrt[3]{(x^2-2x)^5}} + \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{(x^2-2x)^3}} =$$

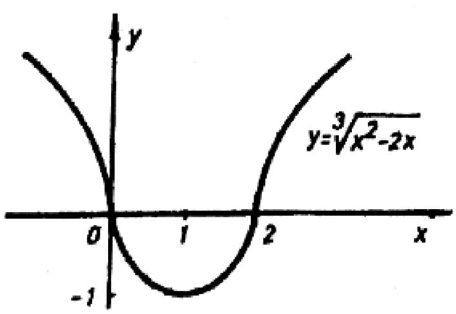
$$= \frac{-4(2x^2-4x+2)+6(x^2-2x)}{9\sqrt[3]{(x^2-2x)^5}} = \frac{-2(x^2-2x+4)}{9x(x-2)\sqrt[3]{(x^2-2x)^2}} = \frac{-2}{9x(x-2)}\frac{(x-1)^2+3}{\sqrt[3]{(x^2-2x)^2}}$$

Други извод функције није дефинисан за $x = 0$ и за $x = 2$ и важи $y'' \neq 0$ за свако x.

	-∞	0	2 +∞
$\frac{-2}{9x(x-2)}$	-	+	-
$\frac{(x-1)^2+3}{\sqrt[3]{(x^2-2x)^2}}$	+	+	+
y''	-	+	-
y	$\cap$	$\cup$	$\cap$

Превојне тачке су (0, 0) и (2, 0).

5) График функције $y = \sqrt[3]{x^2-2x}$:



Задаци за самосталан рад:

Испитати ток и нацртати график функција:

1. $y = x^3 - 9x$;
2. $y = x^3 + 3x^2$;
3. $y = x + \frac{1}{x}$;
4. $y = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$.

Напомена:

С разумијевањем, а пратећи објашњења, преписати поступак за испитивање тока функције и цртање њеног графика, као и ријешене примјере. На основу ријешених примјера урадити задатке за самосталан рад, који имају улогу задаће, а чијом израдом бисте извјежбали ову наставну јединицу. Све послати на увид на имејл адресу jurosevic93biljana@gmail.com или у приватну поруку на вајбер. За вријеме трајања часова у вајбер групу IV_3 пишите за све недоумице у вези овог материјала. Због праћења реализације наставе на даљину неопходно је да имам вашу повратну информацију.