МАТЕМАТИКА, IV$_3$
1. час, 23. 3. 2021. године
Проф. Биљана Јурошевић

ИНТЕГРАЦИЈА ФУНКЦИЈА МЕТОДОМ ЗАМЈЕНЕ – понављање и вјежбање

Задатак1: Израчунај $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$.

Рјешење:

Прије увођења одговарајуће смјене, потребно је примијенити знање о основним тригонометријским идентитетима. Код увођења смјене, размишљамо о изводу те смјене, јер нам је битан при замјени промјенљиве интеграције x функцијом нове промјенљиве t.

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{\cos^2 x \cos x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{(1-\sin^2 x)}{\sin^4 x} \cos x\, dx = \left\{ \begin{matrix} \sin x = t \\ (\sin x)' dx = t' dt \\ \cos x\, dx = dt \end{matrix} \right\} =$$

$$= \int \frac{1-t^2}{t^4} dt = \int \frac{1}{t^4} dt - \int \frac{t^2}{t^4} dt = \int t^{-4} dt - \int t^{-2} dt =$$

$$= \frac{t^{-4+1}}{-4+1} - \frac{t^{-2+1}}{-2+1} + \mathrm{C} = \frac{t^{-3}}{-3} - \frac{t^{-1}}{-1} + \mathrm{C} = -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + \mathrm{C}.$$

Задатак2: Израчунај $\int \frac{dx}{x^2-x+1}$.

Рјешење:

Примјећујемо да је таблични интеграл $\int \frac{dx}{x^2+1}$ најсличнији датом. Напишемо ли квадратни трином у канонском облику, указаће нам се и која је то погодна смјена:

$$x^2 - x + 1 = x^2 - 2\cdot x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 = \left(x^2 - 2\cdot x\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

Затим користимо резултат са претходног часа: $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \mathrm{C}$.

$$\int \frac{dx}{x^2-x+1} = \int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \left\{ \begin{matrix} x - \frac{1}{2} = t \\ dx = dt \end{matrix} \right\} = \int \frac{dt}{(t)^2 + \Big(\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{a}\Big)^2} =$$

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \mathrm{C} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}} + \mathrm{C} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}} + \mathrm{C}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \mathrm{C}.$$

Задатак3: Израчунај $\int \cos 3x \cos x \, dx$.

Рјешење:

Прво примјењујемо адициону формулу $\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$.

$$\int \cos 3x \cos x \, dx = \int \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x)dx = \frac{1}{2}\int \cos 4x \, dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x \, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{c} 4x = t \\ 4dx = dt \\ dx = \frac{1}{4}dt \end{array}\right\} + \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{c} 2x = s \\ 2dx = ds \\ dx = \frac{1}{2}ds \end{array}\right\} = \frac{1}{2}\int \cos t \cdot \frac{1}{4}dt + \frac{1}{2}\int \cos s \cdot \frac{1}{2}ds =$$

$$= \frac{1}{8}\int \cos t \, dt + \frac{1}{4}\int \cos s \, ds = \frac{1}{8}\sin t + \frac{1}{4}\sin s + \mathrm{C} = \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + \mathrm{C}.$$

Задаци за самосталан рад:

Израчунај дате интеграле методом замјене.

1. $\int \frac{dx}{x \ln x}$;
2. $\int \frac{e^x(1+e^x)}{\sqrt{1+e^{2x}}} \, dx$;
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$.

(*Упутство*: Задатке рјешавати користећи идеје претходно ријешених задатака)

Напомена:
С разумијевањем препишите ријешене задатке у свеске.
На основу ријешених задатака урадите задатке за самосталан рад.
На вајбер приватно шаљите ваше радове, како не бисмо оптерећивале групу, а за вријеме трајања часова пишите за све недоумице у вези овог материјала.
Такође, ако нисте успјели урадити задаћу од петка, пишите како бих вам помогла.
Због праћења реализације наставе на даљину неопходно је да имам вашу повратну информацију.