МАТЕМАТИКА, IV_3
1. и 2. час, 25. 3. 2021. године
Проф. Биљана Јурошевић

МЕТОДА ПАРЦИЈАЛНЕ ИНТЕГРАЦИЈЕ

Сама метода замјене није довољна за налажење неодређених интеграла. Нова метода коју ћемо изучавати јесте метода парцијалне интеграције.

Теорема: Нека су функције u и v непрекидне на интервалу (a, b) и нека имају непрекидне изводе u' и v'. Тада је:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx.$$

Обично се ова формула записује краће (не треба заборавити да је у оба интеграла промјенљива интеграције x, а не u или v):

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Примјер1: Нађи $\int xe^x dx$.

$$\int xe^x dx = \left\{\begin{matrix} u = x & dv = e^x dx \\ du = dx & v = \int e^x dx = e^x \end{matrix}\right\} = \overset{u}{x}\,\overset{v}{e^x} - \int \overset{v}{e^x}\,\overset{du}{dx} = xe^x - e^x + C.$$

Дакле, $xe^x dx$ рашчлањујемо на u и dv, тако да за u бирамо функцију чији извод можемо лакше одредити (јер нам је du потребно при примјени формуле из теореме), а за dv узимамо остатак од кога ћемо интеграцијом лакше добити v (такође, неопходно при примјени формуле).

Примјер2: Нађи $\int x \cos x \, dx$.

$$\int x \cos x \, dx = \left\{\begin{matrix} u = x & dv = \cos x \, dx \\ du = dx & v = \int \cos x \, dx = \sin x \end{matrix}\right\} = x \sin x - \int \sin x \, dx =$$

$$= x \sin x + \cos x + C.$$

(За dv је узета функција $\cos x$, јер уколико бисмо узели функцију xdx, добили бисмо компликованији интеграл примјеном формуле)

Примјер3: Нађи $\int x^2 \ln x \, dx$.

$$\int x^2 \ln x \, dx = \left\{\begin{matrix} u = \ln x & dv = x^2 dx \\ du = \frac{1}{x} dx & v = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \end{matrix}\right\} = \ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \frac{1}{x} dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \frac{x^3}{3} + C = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C.$$

Примјер4: Нађи $\int \operatorname{arctg} x \, dx$.

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx = \left\{ \begin{matrix} u = \operatorname{arctg} x & dv = dx \\ du = \frac{1}{1+x^2} dx & v = \int dx = x \end{matrix} \right\} = \operatorname{arctg} x \cdot x - \int x \frac{1}{1+x^2} dx =$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \left\{ \begin{matrix} 1 + x^2 = t \\ 2xdx = dt \\ xdx = \frac{1}{2} dt \end{matrix} \right\} = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{1}{t} \frac{1}{2} dt = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt =$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln|t| + \mathrm{C} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln|1 + x^2| + \mathrm{C}.$$

Примјер5: Нађи $\int \frac{x}{e^x} dx$.

$$\int \frac{x}{e^x} dx = \left\{ \begin{matrix} u = x & dv = \frac{1}{e^x} dx \\ du = dx & v = \int e^{-x} dx = \left\{ \begin{matrix} -x = t \\ -dx = dt \\ dx = -dt \end{matrix} \right\} = -\int e^t dx = -e^{-x} \end{matrix} \right\} =$$

$$= -xe^{-x} - \int -e^{-x} dx = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx = -xe^{-x} - e^{-x} + \mathrm{C} =$$

$$= -(x+1)e^{-x} + \mathrm{C}.$$

Задаци за самосталан рад:

Израчунај дате интеграле:

1. $\int x^2 e^x dx$;
2. $\int \ln x \, dx$;
3. $\int x \ln(x-1) \, dx$.

Напомена:

С разумијевањем препишите ријешене задатке у свеске.
На основу ријешених задатака покушајте да урадите задатке за самосталан рад.
На вајбер приватно шаљите ваше радове, како не бисмо оптерећивале групу, а за вријеме трајања часова пишите за све недоумице у вези овог материјала.
Због праћења реализације наставе на даљину неопходно је да имам вашу повратну информацију.