МАТЕМАТИКА, IV3
1. час, 30. 3. 2021. године
Проф. Биљана Јурошевић

<u>МЕТОДА ПАРЦИЈАЛНЕ ИНТЕГРАЦИЈЕ – понављање и вјежбање</u>

У наредним задацима неопходна је двострука примјена парцијалне интеграције како бисмо дошли до рјешења.

Задатак1: Нађи $\int x^2 \cos x\, dx$.

Рјешење:

$$\int x^2 \cos x\, dx = \left\{\begin{matrix} u = x^2 & dv = \cos x\, dx \\ du = 2x dx & v = \int \cos x\, dx = \sin x \end{matrix}\right\} = x^2 \sin x - \int 2x \sin x\, dx =$$

$$= x^2 \sin x - 2\left\{\begin{matrix} u = x & dv = \sin x\, dx \\ du = dx & v = \int \sin x\, dx = -\cos x \end{matrix}\right\} =$$

$$= x^2 \sin x - 2\left(-x\cos x - \int -\cos x\, dx\right) = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2\int \cos x\, dx$$

$$= x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + \mathrm{C}.$$

Задатак2: Нађи $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$.

Рјешење:

$$\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx = \int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx = \left\{\begin{matrix} u = \ln^2 x & dv = x^{-2} dx \\ du = 2\ln x \frac{1}{x} dx & v = \int x^{-2} dx = -\frac{1}{x} \end{matrix}\right\} =$$

$$= -\frac{1}{x}\ln^2 x - \int 2\ln x \frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x}\right) dx = -\frac{1}{x}\ln^2 x + 2\int \ln x \frac{1}{x^2} dx =$$

$$= -\frac{1}{x}\ln^2 x + 2\left\{\begin{matrix} u = \ln x & dv = x^{-2} dx \\ du = \frac{1}{x} dx & v = \int x^{-2} dx = -\frac{1}{x} \end{matrix}\right\} =$$

$$= -\frac{1}{x}\ln^2 x + 2\left(-\frac{1}{x}\ln x - \int -\frac{1}{x}\frac{1}{x} dx\right) = -\frac{1}{x}\ln^2 x - 2\frac{1}{x}\ln x + 2\int \frac{1}{x^2} dx =$$

$$= -\frac{1}{x}\ln^2 x - 2\frac{1}{x}\ln x - 2\frac{1}{x} + \mathrm{C} = -\frac{1}{x}(\ln^2 x + 2\ln x + 2) + \mathrm{C}.$$

Задаци за самосталан рад:
Израчунај дате интеграле:

1. $\int x \ln^2 x\, dx$;
2. $\int (\arcsin x)^2\, dx$.

МАТЕМАТИКА, IV3
1. и 2. час, 1. 4. 2021. године
Проф. Биљана Јурошевић

ИНТЕГРАЦИЈА РАЦИОНАЛНИХ ФУНКЦИЈА

Количник два полинома назива се рационална функција $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.
R(x) је *права рационална функција* ако је степен полинома P(x) мањи од степена полинома Q(x), тј. deg(P(x)) < deg(Q(x)).
Свака рационална функција се може представити као збир полинома и праве рационалне функције:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \mathrm{A}(x) + \frac{\mathrm{B}(x)}{Q(x)},\text{ гдје је deg(B}(x)) < \text{deg(Q}(x)).$$

Свака права рационална функција може се написати у облику збира простих (парцијалних) разломака, а сваки полином n – тог степена има n нула и може се представити у облику

$$Q(x) = a(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_r)(x^2 + b_1x + c_1) \dots (x^2 + b_sx + c_s),$$

гдје су полиноми другог степена несводљиви (дискриминанта је мања од нуле).
Неки од фактора у производу могу да се поклапају. Тада:

1. Фактору $x - a$ одговара $\frac{\mathrm{A}}{x-a}$, A = *const*;
2. Фактору $(x-a)^k$ $(k \geq 2)$ одговара $\frac{\mathrm{A}_1}{x-a} + \frac{\mathrm{A}_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{\mathrm{A}_k}{(x-a)^k}$, A_i = *const*. (i = 1, ..., k);
3. Фактору $x^2 + bx + c$ $(b^2 - 4ac < 0)$ одговара $\frac{\mathrm{B}x+\mathrm{C}}{x^2+bx+c}$, B, C = *const*;
4. Фактору $(x^2 + bx + c)^k$ $(b^2 - 4ac < 0, k \geq 2)$ одговара
$\frac{\mathrm{B}_1x+\mathrm{C}_1}{x^2+bx+c} + \frac{\mathrm{B}_2x+\mathrm{C}_2}{(x^2+bx+c)^2} + \dots + \frac{\mathrm{B}_kx+\mathrm{C}_k}{(x^2+bx+c)^k}$, B_i, C_i = *const*. (i = 1, ..., k).

Примјер1: Израчунај

$$\int \frac{x+2}{x^3-x}dx.$$

Подинтегрална функција $\frac{x+2}{x^3-x}$ је права рационална функција, па је растављамо на збир одговарајућих парцијалних разломака:

$$\frac{x+2}{x^3-x} = \frac{x+2}{x(x^2-1)} = \frac{x+2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{\mathrm{A}}{x} + \frac{\mathrm{B}}{x-1} + \frac{\mathrm{C}}{x+1}.$$

Користили смо 1. случај, јер је $x^3 - x = x(x-1)(x+1)$, односно сви фактори су облика $x - a$ и њима одговарају разломци облика $\frac{\mathrm{A}}{x-a}$. A, B и C су константе, реални бројеви.
Даље имамо,

$$\frac{x+2}{x^3-x} = \frac{\mathrm{A}(x-1)(x+1) + \mathrm{B}x(x+1) + \mathrm{C}x(x-1)}{x(x-1)(x+1)} = \frac{\mathrm{A}(x^2-1) + \mathrm{B}x(x+1) + \mathrm{C}x(x-1)}{x(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{\mathrm{A}x^2 - \mathrm{A} + \mathrm{B}x^2 + \mathrm{B}x + \mathrm{C}x^2 - \mathrm{C}x}{x(x-1)(x+1)} = \frac{x^2(\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}) + x(\mathrm{B}-\mathrm{C}) - \mathrm{A}}{x(x-1)(x+1)}$$

A, B и C ћемо добити из једнакости бројилаца полазног и крајњег разломка:

$$x+2=x^2(\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C})+x(\mathrm{B}-\mathrm{C})-\mathrm{A}.$$

Изједначавањем коефицијената испред једнаких степена ових полинома, добијамо систем:

$$\begin{gathered}\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}=0\\ \mathrm{B}-\mathrm{C}=1\\ -\mathrm{A}=2\end{gathered}$$

Систем рјешавамо на било који познат начин, а рјешења су $\mathrm{A}=-2$, $\mathrm{B}=\frac{3}{2}$ и $\mathrm{C}=\frac{1}{2}$.

Сада се израчунавање интеграла дате функције своди на израчунавање збира интеграла

$$\int\frac{x+2}{x^3-x}dx=\int\left(\frac{-2}{x}+\frac{\frac{3}{2}}{x-1}+\frac{\frac{1}{2}}{x+1}\right)dx=-2\int\frac{dx}{x}+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}=$$

$$=-2\ln|x|+\frac{3}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x+1|+\mathrm{C}.$$

(*Напомена*: Први интеграл је таблични, а друга два интеграла рјешавају се увођењем смјена $x-1$ и $x+1$)

Примјер2: Израчунај

$$\int\frac{x+1}{x(x-1)^2}dx.$$

За дату подинтегралну рационалну функцију користимо 1. и 2. случај, јер је x облика $x-a$ и њему одговара разломак облика $\frac{\mathrm{A}}{x-a}$, а фактору $(x-1)^2$ $(k=2)$ одговараће збир $\frac{\mathrm{A}_1}{x-a}+\frac{\mathrm{A}_2}{(x-a)^2}$.

A, B и C су константе, реални бројеви.

$$\frac{x+1}{x(x-1)^2}=\frac{\mathrm{A}}{x}+\frac{\mathrm{B}}{x-1}+\frac{\mathrm{C}}{(x-1)^2}$$

Даље имамо,

$$\frac{x+1}{x(x-1)^2}=\frac{\mathrm{A}(x-1)^2+\mathrm{B}x(x-1)+\mathrm{C}x}{x(x-1)^2}=\frac{\mathrm{A}(x^2-2x+1)+\mathrm{B}(x^2-x)+\mathrm{C}x}{x(x-1)^2}=$$

$$=\frac{\mathrm{A}x^2-2\mathrm{A}x+\mathrm{A}+\mathrm{B}x^2-\mathrm{B}x+\mathrm{C}x}{x(x-1)^2}=\frac{x^2(\mathrm{A}+\mathrm{B})+x(-2\mathrm{A}-\mathrm{B}+\mathrm{C})+\mathrm{A}}{x(x-1)^2}.$$

Изједначавањем бројилаца

$$x+1=x^2(\mathrm{A}+\mathrm{B})+x(-2\mathrm{A}-\mathrm{B}+\mathrm{C})+\mathrm{A},$$

добићемо систем једначина из кога ћемо одредити коефицијенте A, B и C.

$$\begin{gathered}\mathrm{A}+\mathrm{B}=0\\ -2\mathrm{A}-\mathrm{B}+\mathrm{C}=1\\ \mathrm{A}=1\end{gathered}$$

Одавде је A = 1, B = –1 и C = 3.

Сада је

$$\int\frac{x+1}{x(x-1)^2}dx=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{-1}{x-1}+\frac{3}{(x-1)^2}\right)dx=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x-1}+3\int\frac{dx}{(x-1)^2}=$$

$$=\ln|x|-\ln|x-1|+3\left\{\begin{matrix}x-1=t\\ dx=dt\end{matrix}\right\}=\ln|x|-\ln|x-1|+3\int\frac{dt}{t^2}=$$

$$=\ln|x|-\ln|x-1|+3\frac{t^{-2+1}}{-2+1}+\mathrm{C}=\ln|x|-\ln|x-1|-\frac{3}{x-1}+\mathrm{C}.$$

Примјер3: Израчунај

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)}dx.$$

За дату подинтегралну рационалну функцију користимо 1. и 3. случај, јер је x облика $x - a$ и њему одговара разломак облика $\frac{\mathrm{A}}{x-a}$, а фактору $x^2 + 1$ ($b^2 - 4ac = -4 < 0$) одговара $\frac{\mathrm{B}x+\mathrm{C}}{x^2+bx+c}$. A, B и C су константе, реални бројеви.

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{\mathrm{A}}{x} + \frac{\mathrm{B}x+\mathrm{C}}{(x^2+1)}$$

Даље имамо,

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{\mathrm{A}(x^2+1)+(\mathrm{B}x+\mathrm{C})x}{x(x^2+1)} = \frac{\mathrm{A}x^2+\mathrm{A}+\mathrm{B}x^2+\mathrm{C}x}{x(x^2+1)} = \frac{x^2(\mathrm{A}+\mathrm{B})+\mathrm{C}x+\mathrm{A}}{x(x^2+1)}.$$

Изједначавањем бројилаца

$$1 = x^2(\mathrm{A}+\mathrm{B}) + \mathrm{C}x + \mathrm{A},$$

добићемо систем једначина из кога ћемо одредити коефицијенте A, B и C.

$$\mathrm{A}+\mathrm{B} = 0$$
$$\mathrm{C} = 0$$
$$\mathrm{A} = 1$$

Одавде је A = 1, B = –1 и C = 0.

Сада је

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)}dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{-x}{x^2+1}\right)dx = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{x^2+1}dx = \ln|x| - \left\{\begin{matrix} x^2+1=t \\ 2xdx = dt \\ xdx = \frac{1}{2}dt \end{matrix}\right\} =$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|t| + \mathrm{C} = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \mathrm{C}.$$

Задаци за самосталан рад:

Израчунај дате интеграле:

1. $\int \frac{7x+4}{x^2-x-6}dx$;
2. $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x^2+1)}$.

Напомена:

За вријеме трајања часова с разумијевањем препишите дати материјал у свеске, фотографишите и пошаљите на увид на вајбер приватно, како не бисмо оптерећивали групу.

На основу ријешених задатака покушајте да урадите задатке за самосталан рад.

Због праћења реализације наставе на даљину неопходно је да имам вашу повратну информацију (фотографију као доказ).